1042. 一般二元複素変数函数論ノ軌道

高須 鶴三郎 (東北大)

前回迄デ私ノ考ニ缺点ノアッタ場合ニ皆様ノ御助言ヲ仰ギ度サニ種々述ベマシタガ，結局一般二元複素変数 $\zeta = x + jy$．($j^2 = \mu + \nu j$; μ, ν, x, y ハ實數) ノ函数論研究法ハ之ヲ次ノ如ク完全ニ軌道ニ載セ得テ，充分透明ナモノトナリ，全体ハ全ク美シイ科學トナルコトガ分リマシタ。唯餘リ充分ニ行キ過ギル部分ガ大半ヲ占メマスノデ一寸ノキマリ悪サヲ感ズルノデアリマス。

1. xy 平面上ノ幾何學的法則ハ

$$\zeta = \rho e^{j\theta} = \rho(\cos j\,\theta + j \sin j\,\theta),$$

$$\bar{\zeta} = \rho e^{-j\theta} = \rho(\cos\bar{j}\,\theta + \bar{j} \sin\bar{j}\,\theta), \quad j+\bar{j}=\nu,\ j\bar{j}=-\mu,$$

$$\sin j\,\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{\bar{j}\varphi}}{2j-\nu}, \quad \cos j\,\varphi = \frac{j(e^{\bar{j}\varphi}+e^{j\varphi})-\nu e^{j\theta}}{2j-\nu},$$

$$\cos j^2\varphi + \nu \cos j\,\varphi \sin j\,\varphi - \mu \sin j^2\varphi = 1$$

ナル Trigonometrie ヲ許ス様ナ非 Euclid 的 Parabolische Geometrie デアリマス。

2. 絶對値ト modulus　点 (x, y) ヲ過ギリ，j ナル方向係数ヲ有ツ様ナ Isotrope $X-x+j(Y-y)=0$ ガ x 軸 $(Y=0)$ カラ截リトル截片

(1)　$X = x + jy = \zeta$

トシテ $\zeta = x+jy$ ノ一ツノ Interpretation ガ出来マス。（$\nu^2+4\mu<0$ ノ時ハ之ハ通常ノ複素数）此ノコトニ基イテ，通常ノ意味（実域若クハ複素域）ノ絶對値

(2)　$|X| = |x+jy|, \quad |\bar{X}| = |x+\bar{j}y|$

ヲ以テ夫々 ζ 及ビ $\bar{\zeta}$ ノ絶對値ト定義シ，modulus

(3)　$\|\zeta\| = \|\bar{\zeta}\| = \|X\| = \|\bar{X}\| = \rho$

$$= \sqrt{x^2+\nu xy-\mu y^2}$$

ト區別シマス。ソウスルト，極限，連續性及ビ其レニ関聯スル諸概念ノ導入ガ通常通リノ形式デ導入可能トナリ，従ッテ Abschatzen ガ出来ルコトニナリマス。（$\|\zeta\| = |\zeta|$ トナルノハ $\nu^2+4\mu<0$ ノ場合ニ限リマス）ソシテ例ヘバ Bieberbach ノ教科書第一巻ノ如ク議論シテ進ムト

3. Cauchy ノ積分定理迄ハ三ツノ場合

$$\nu^2+4\mu<0 \quad \Big| \quad \nu^2+4\mu\to 0 \quad \Big| \quad \nu^2+4\mu>0$$

ヲ通ジテ統一的取扱ガ出来マス。

4. Cauchy ノ積分公式ニ至ルト，$\nu^2+4\mu<0$ ノ場合以外其レガ entarten シマスカラ，道ガ二ツニ分レ

I. $\nu^2+4\mu<0$ ノ場合ニハ，全複素函数論ガ，一般理論，特殊函数論，漸近理論等隅カラ隅迄完全ニ拡張セラレマス。（其ノ際通常円ガ考ヘラレル所ヘ楕円ガ考ヘラレマス）

II. $\nu^2+4\mu<0$ 以外ノ場合ニハ，(1) 及ビ (1) ニ準ジテ作ッタ

(4) $\quad \bar{X}=x+jy=\bar{\zeta}$

ガモトニナッテ，実函数論ガ隅カラ隅迄全部完全ニ拡張セラレテ然カモ二次元性ヲ発揮スルコトハ，$f(x)$ ト $\bar{f}(\bar{X})$ トノ理論ヲ X一軸上ノ領域デ把握シ，其レ等ヲ組ミ合セテ xy 平面上ノ領域デ把握スレバヨイノデス。

斯クシテ，Rolle ノ定理，平均値ノ定理，Taylor ノ定理，……ノ如ク進スコトガ出来マス。（之等ノ定理デハ $0<\theta<1$ ナル θ ガ二ツノ（θ_j, $\theta_{\bar{j}}$）アラハレテ，$z+\theta_j h$, $\bar{z}+\theta_{\bar{j}}\bar{h}$ ニ対スル点 M ヲ図ノ如ク考ヘルコトニナリマス）

斯クシテ微分方程式論，積分方程式論，漸近微分論，漸近積分論等ハ全部完全ニ二次元ニ拡張セラレマス。

又冪級数ノ収斂域ハ

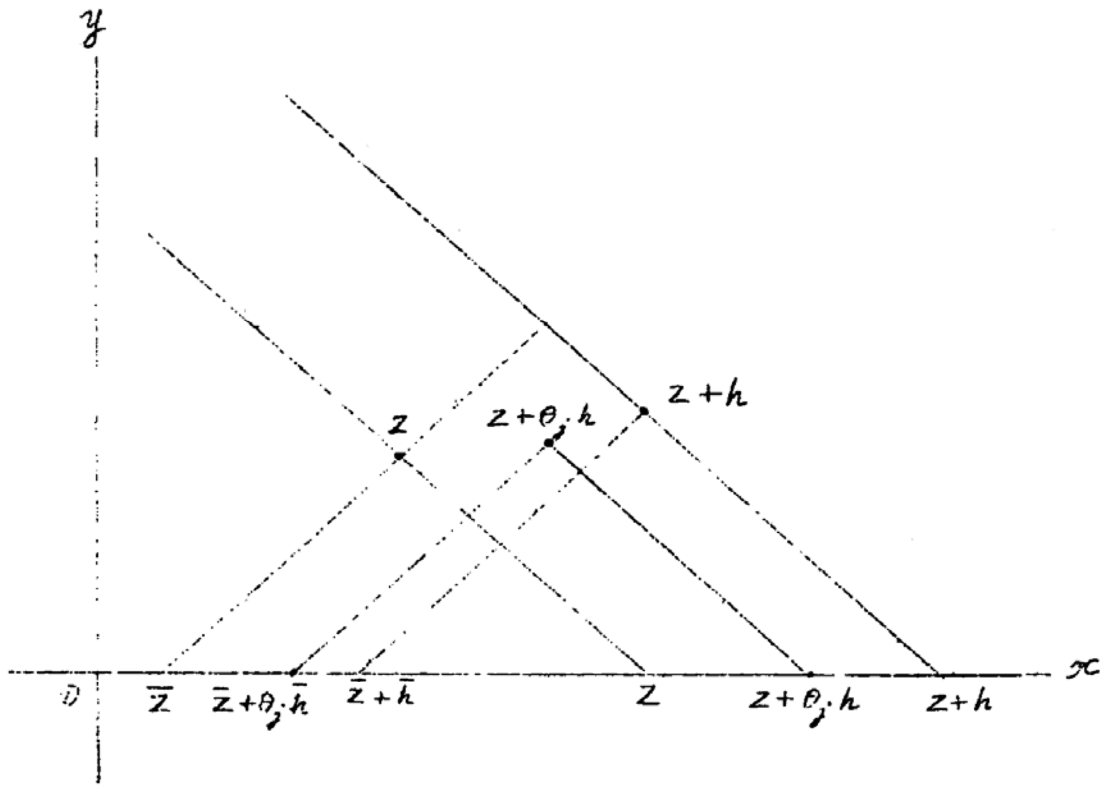
$$\nu^2+4\mu\to 0 \quad \Big| \quad \nu^2+4\mu>0$$

ノ時ハ Isotrop

$$X+jY=0 \quad \Big| \quad X+jY=0,\ X+\bar{j}Y=0$$

ニ平行ナ辺ヲ有スル

Band ｜ 平行四辺形デアリマス。



III. $\nu^2+4\mu<0$ 以外ノ場合デモ，I，II デ掲ゲタ以外，二次元独得ノ領域モ少クアリマセン。

例ヘバ

(i) 一次函数論ハ，三ツノ場合

$$\nu^2+4\mu<0 \quad \Big| \quad \nu^2+4\mu\to 0 \quad \Big| \quad \nu^2+4\mu>0$$

ヲ通ジテ完全ニ統一セラレテ皆等シクナリマス。

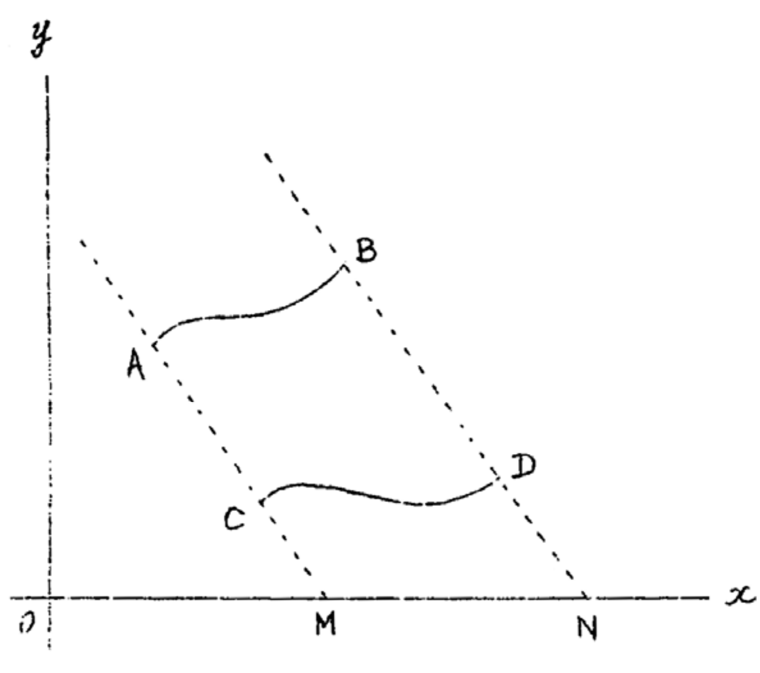
(ii) Cauchy ノ積分定理ヲ圖ノ閉曲線 ABDC ニ適用シテ（AC, BD ハ Isotrope デ其ノ上デハ $d\zeta=0$）分ル如ク，微分可能ナ $f(\zeta)$ ニツイテハ，A, C 及ビ B, D ガ

夫々同一ノ Isotrope ノ上ニアル限リ，積分ノ道ニ拘ラズ

$$\int_A^B f(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\int_C^D f(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\int_{\overline{MN}} f(\zeta)\,d\zeta$$



デアリマス。従テ P, Q ガ同一ノ Isotrope 上ニアル限リ，積分ノ道ニ拘ラズ

$$\int_{PQ} f(\zeta)\,d\zeta=0$$

ガ成立シマス。

(iii) $\nu^2+4\mu>0$ ノ場合ニハ，$\sin\zeta$，$\cos\zeta$ 等ハ doppelperiodische Functionen デアリマシテ，其ノ Fundamentalbereich ハ Isotrope ニ平行ナ辺ヲ有スル平行四辺形デアリマス。

5. 應用例

(i) 普通ノ流体力學デ，解析函数 $f(\zeta)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ ヲ用ヒテ，equivelocity-potential line $\varphi=\text{const.}$ ト stream line $\psi=\text{const.}$ ヲ出シマス如ク，高速度航空流体力學デ，流体ノ速度ト音ノ速度トヲ夫々 q 及ビ c トシタ際ニ

$q < c$ | $q \quad c$ | $q > c$

ニ對シテ夫々

$\zeta = x + iy,\ i^2 = -1$ | $\zeta = x + py,\ p^2 = 0$ | $\zeta = x + hy,\ h^2 = +1$

ヲ用ヒテ, equivelocity-potential line $\varphi = \text{const.}$ ト stream line $\psi = \text{const.}$ ヲ扱フコトガ次ノ論文ニヤツテアリマス.

D. Riabonchinsky, Recherches sur l'amélioration des qualités aérodynamiques des profils d'ailes aux grandes vitesses. Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air. N°. 108 (1937)

(ii) Minimal surface ノ Weierstrass-Bonnet ノ公式

$$x = R\frac{1}{2}\int (1 - \zeta^2) F(\zeta)\, d\zeta,$$

$$y = R\frac{1}{2}\int (1 + \zeta^2) F(\zeta)\, d\zeta,$$

$$z = R\int \zeta F(\zeta)\, d\zeta$$ ニ於テ, ζ トシテ

$\nu^2 + 4\mu < 0$ | $\nu^2 + 4\mu \to 0$ | $\nu^2 + 4\mu > 0$

ノ場合, $\zeta = x + jy$ ヲ用フルト, 新シイ surface class ノ美シク大キイ理論ガ得ラレマス。

(iii) Laguerre-minimal surface ノ私ノ公式

$$\zeta_1 = R\frac{1}{2}\int(1-st)F(\zeta)d\zeta,$$

$$\zeta_2 = R\frac{1}{2}\int(1+st)F(\zeta)d\zeta,$$

$$\zeta_3 = -R\frac{1}{2}\int(s+t)F(\zeta)d\zeta,$$

$$\zeta_4 = \frac{i}{2}\int(s-t)F(\zeta)d\zeta, \quad (s=s(\zeta),\ t=t(\zeta))$$

ニツイテモ同様デアリマス。